OPERATIONS RESEARCH VERFAHREN XXV
METHODS OF OPERATIONS RESEARCH

Sonderdruck

FIRST SYMPOSIUM ON OPERATIONS RESEARCH

University of Heidelberg, September 1 – 3, 1976

Mitherausgegeben von:
Coedited by:
ADOLF ANGERMANN, HEIDELBERG
ROLF KAERKES, AACHEN
KLAUS-PETER KISTNER, BIELEFELD
KLAUS NEUMANN, KARLSRUHE
BURKHARD RAUHUT, AACHEN
FRANZ STEFFENS, MANNHEIM

Teil 1

VERLAG ANTON HAIN · MEISENHEIM AM GLAN

Ein Warteschlangensystem mit zeitabhängigen Parametern

R. Hauser, Saarbrücken

1. Einleitung und Zusammenfassung

Im folgenden wird ein Warteschlangensystem mit unendlichem Warteraum und einer Bedienungsstation betrachtet. Der Ankunftsstrom folgt einem Poissonprozeß, und die Bedienungszeiten gehorchen einer negativen Exponentialverteilung. Dabei hängen die Parameter von der Zeit ab. Die Bedienung erfolgt in der Reihenfolge "first come first served". Das Problem besteht darin, eine exakte Lösung für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Kundenanzahl im System in Abhängigkeit von der Zeit zu finden. Clarke [1953] und Luchak [1956] haben Lösungen für die Wahrscheinlichkeitsverteilung angegeben. Diese Lösungen haben aber den Nachteil, den Leese [1966] folgendermaßen umschreibt:

> "Two difficulties arise in applying Clarke's method to solve a specific numerical problem. In the first place, the kernel of Clarke's integral equation tends to infinity at one end of the range of integration. Secondly, Clarke's formulae contain expressions of the form
>
> $$Q_n(t) = P_n(t)\cdot \exp\left[t + \int_0^t \rho(s)ds\right]. \qquad (*)$$
>
> ...exponential expression in $(*)$ may have a value as great as e^{600}. Both these features of Clarke's solution make numerical solution by standard methods extremely awkward.
>
> Luchak's solution consists essentially of a Taylor's series expansion of $Q_n(t)$ about $t = 0$. Because Q_n increases so rapidly with t, an extremely large number of terms of Taylor's series would be required to obtain satisfactory answer for values of t as high as 400."

Im folgenden soll nun eine Lösung dargeboten werden, die keine der oben angeführten Nachteile besitzt. Weiterhin wird die Grenzverteilung für $t\to\infty$ bestimmt, falls diese existiert.

2. Quantitative Erfassung des Warteschlangensystems

Es wird ein Markoffprozeß $X(t)$, $o\le t<\infty$, mit diskretem Zustandsraum $S=\{o,1,2,...\}$ betrachtet, für den eine nichtnegativ, beschränkte Funktion $\lambda(t)$ und eine positiv, beschränkte Funktion $\mu(t)$, $o\le t<\infty$, existiert, die den folgenden Bedingungen genügen:

(i) $P\{X(t+\Delta t)=i+1/X(t)=i\}=\lambda(t)\Delta t+o(\Delta t)$, $i=o,1,2,...,$

(ii) $P\{X(t+\Delta t)=i-1/X(t)=i\}=\mu(t)\Delta t+o(\Delta t)$, $i=1,2,3,...,$

(iii) $P\{X(t+\Delta t)=j/X(t)=i\}=o(\Delta t)$, $|i-j|>1$, $i,j=o,1,2...$.

Die Gleichungen besagen, daß die Wahrscheinlichkeit einer Ankunft während des Zeitintervalls $(t,t+\Delta t)$ gleich $\lambda(t)\Delta t+o(\Delta t)$ ist, und die Wahrscheinlichkeit einer Bedienung während dieses Zeitintervalls $\mu(t)\Delta t+o(\Delta t)$ ist. Die Wahrscheinlichkeit von mehr als einer Ankunft und/oder Abfertigung ist $o(\Delta t)$. Man bezeichnet $\lambda(t)$ als momentane Ankunftsrate und $\mu(t)$ als momentane Bedienungsrate.

Es sei

$$P_{in}(t)=P\{X(t)=n/X(o)=i\},\quad i,n=o,1,2....,$$

die Wahrscheinlichkeit, daß sich das System zum Zeitpunkt t im Zustand n befindet, falls es zum Zeitpunkt o im Zustand i war. Unter diesen Bedingungen ergibt sich folgendes Kolmogoroff'sche System von Vorwärts-Differentialgleichungen:

$$(2.1)\qquad \frac{dP_{io}(t)}{dt} = -\lambda(t)P_{io}(t)+\mu(t)P_{i1}(t)$$

$$(2.2)\qquad \frac{dP_{in}(t)}{dt} = \lambda(t)P_{in-1}(t)-(\lambda(t)+\mu(t))P_{in}(t)+\mu(t)P_{in+1}(t),\quad n>o$$

(vgl. z.B. [7] S. 4o7 ff).

Das Hauptproblem besteht nun darin, dieses unendliche System von Differentialgleichungen unter der Anfangsbedingung:

$$(2.3)\qquad P_{in}(o) = \begin{cases} 1 & \text{für } n=i \\ o & \text{für } n\neq i \end{cases}$$

zu lösen. Durch einen Satz von Feller[1)] ist man versichert, daß das Differentialgleichungssystem genau ein stetig differenzierbares System von Lösungen $P_{in}(t)$ besitzt mit den Eigenschaften:

(i) $P_{in}(t) \ge o$ für jedes $n=o,1,2,...,$

(ii) $\sum_{n=o}^{\infty} P_{in}(t) = 1$ für jedes $t\ge o$.

1) Feller, W.: On the Integrodifferential Equations of Completely Discontinuous Markov Processes, Trans. Am. Math. Soc., Vol.48, 194o, P. 488-515.

Universität Saarbrücken
Lehrstuhl für Statistik und Ökonometrie
Bau 31
D-6600 Saarbrücken 15

Findet man daher ein Lösungssystem $P_{in}(t)$, das den Bedingungen (2.1) bis (2.3) genügt, dann ist dies die einzige Lösung.

3. Die Lösung des Differentialgleichungssystems

Führt man eine neue Zeitvariable τ wie folgt ein:

$$\tau = \tau(t) = \int_0^t \mu(s)ds,$$

und führt man außerdem die momentane Verkehrsintensität als Quotient der momentanen Ankunfts- und Bedienungsrate ein, d.h.

$$\rho(\tau) = \rho(\tau(t)) = \frac{\lambda(t)}{\mu(t)} \quad ,$$

dann läßt sich das System (2.1) bis (2.3) folgendermaßen umschreiben:

$$(3.1) \quad \frac{dP_{io}(\tau)}{d\tau} = -\rho(\tau)\cdot P_{io}(\tau)+P_{i1}(\tau)$$

$$(3.2) \quad \frac{dP_{in}(\tau)}{d\tau} = \rho(\tau)\cdot P_{in-1}(\tau)-(\rho(\tau)+1)\cdot P_{in}(\tau)+P_{in+1}(\tau), n>o$$

$$(3.3) \quad P_{in}(o) = \begin{cases} 1 & \text{für } n=i \\ o & \text{für } n\neq i \end{cases} \qquad i,n = o,1,2\ldots .$$

Führt man eine mittlere Verkehrsintensität wie folgt ein:

$$R(\tau) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \rho(s)ds,$$

und definiert man eine Funktion $A_n(\tau,x)$ in der folgenden Weise:

$$A_n(\tau,x)=(v(\tau,x))^n\ I_n(w(\tau,x))e^{-u(\tau,x)}$$

mit

$$v(\tau,x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{R(\tau)\tau-R(x)x}{\tau-x}} & \text{für } x\neq\tau \\ \sqrt{\rho(\tau)} & \text{für } x=\tau \end{cases}$$

$$w(\tau,x) = 2\sqrt{(R(\tau)\tau-R(x)x)(\tau-x)}$$

$$u(\tau,x) = R(\tau)\tau-R(x)x+\tau-x$$

$$I_n(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=o}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k}}{k!\Gamma(n+k+1)}$$ (modifizierte Besselfunktion 1. Art n-ter Ordnung),

dann gilt der folgende Satz:

Satz 3.1

$$(3.4) \quad P_{in}(\tau) = A_{n-i}(\tau,o)+\int_0^\tau A_n(\tau,x)G_i(x)dx, \quad n\geq o,$$

ist Lösung des Differentialgleichungssystems (3.1) und (3.2) mit der Anfangsbedingung (3.3), falls $G_i(x)$ der Volterra'schen Integralgleichung 2. Art

$$(3.5) \quad G_i(\tau)=A_{-i}(\tau,o)-\rho(\tau)A_{-i-1}(\tau,o)+\int_0^\tau(A_o(\tau,x)-\rho(\tau)A_{-1}(\tau,x))G_i(x)dx$$

genügt.

Beweis:

Zum Beweis sollten folgende Beziehungen beachtet werden:

$$\frac{\partial A_n(\tau,x)}{\partial\tau} = \rho(\tau)A_{n-1}(\tau,x)-(\rho(\tau)+1)A_n(\tau,x)+A_{n+1}(\tau,x)$$

$$(3.6) \quad A_n(\tau,\tau) = \begin{cases} 1 & \text{für } n=o \\ o & \text{für } n>o \end{cases}, \ \tau>o \qquad A_n(o,o) = \begin{cases} 1 & \text{für } n=o \\ o & \text{für } n\neq o \end{cases}$$

Differenziert man (3.4) unter Beachtung von (3.6) und den Regeln für Differentiation unter dem Integralzeichen, dann ergibt sich für n>o nach Umordnung der einzelnen Glieder folgender Ausdruck:

$$\frac{dP_{in}(\tau)}{d\tau} = \rho(\tau)\left[A_{n-i-1}(\tau,o)+\int_0^\tau A_{n-1}(\tau,x)G_i(x)dx\right]$$
$$-(\rho(\tau)+1)\left[A_{n-i}(\tau,o)+\int_0^\tau A_n(\tau,o)G_i(x)dx\right]$$
$$+\left[A_{n-i+1}(\tau,o)+\int_0^\tau A_{n+1}(\tau,x)G_i(x)dx\right]$$

Setzt man für die Ausdrücke in der eckigen Klammer die Beziehung (3.4) ein, dann ist sofort ersichtlich, daß das Differentialgleichungssystem (3.2) erfüllt ist. Für n=o gilt nach Umordnung der einzelnen Glieder:

$$\frac{dP_{io}(\tau)}{d\tau} = -\rho(\tau)\left[A_{-i}(\tau,o)+\int_0^\tau A_o(\tau,x)G_i(x)dx\right]$$
$$+\left[A_{1-i}(\tau,o)+\int_0^\tau A_1(\tau,x)G_i(x)dx\right]$$
$$+\left[G_i(\tau)-A_{-i}(\tau,o)+\rho(\tau)A_{-i-1}(\tau,o)-\int_0^\tau(A_o(\tau,x)-\rho(\tau)A_{-1}(\tau,x))G_i(x)dx\right].$$

Die ersten beiden Ausdrücke in der eckigen Klammer stellen gemäß (3.4) gerade $P_{io}(\tau)$ und $P_{i1}(\tau)$ dar. Der Ausdruck in der letzten eckigen Klammer ist aufgrund von (3.5) gerade Null und somit ist auch die Differentialgleichung (3.1) erfüllt. Es bleibt jetzt nur noch zu zeigen, daß auch die Anfangsbedingung (3.3) erfüllt ist. Aufgrund von (3.4) gilt

$$P_{in}(o)=A_{n-i}(o,o) = \begin{cases} 1 & \text{für } n=i \\ o & \text{für } n\neq i \end{cases}$$

wegen (3.6). Damit ist nun bewiesen, daß das Lösungssystem (3.4) das Differentialgleichungssystem (3.1) und (3.2) mit der Anfangsbedingung (3.3) befriedigt, falls (3.5) erfüllt ist.
Falls für den Anfangszustand gilt:

$$(3.7)\quad P_{on} = \begin{cases} 1 & \text{für } n=o \\ o & \text{für } n>o, \end{cases}$$

dann läßt sich die Lösung von (3.1) und (3.2) auch in einer anderen Form darstellen und es gilt der folgende Satz:

<u>Satz 3.2</u>

$$(3.8)\quad P_{oo}(\tau)=1-\int_o^\tau(\rho(x)A_o(\tau,x)-A_2(\tau,x))G_o(x)dx$$

$$(3.9)\quad P_{on}(\tau)=\int_o^\tau(\rho(x)A_{n-1}(\tau,x)-A_{n+1}(\tau,x))G_o(x)dx$$

$$-\int_o^\tau(\rho(x)A_n(\tau,x)-A_{n+2}(\tau,x))G_o(x)dx,\quad n>o$$

ist Lösung des Differentialgleichungssystems (3.1) und (3.2) mit der Anfangsbedingung (3.7), falls $G_o(x)$ der Volterra'schen Integralgleichung 2. Art

$$(3.1o)\quad G_o(\tau)=1-\int_o^\tau(\rho(x)A_{-1}(\tau,x)-A_1(\tau,x))\cdot G_o(x)dx$$

genügt.
Der Beweis folgt entsprechend Satz 1, deshalb soll er hier nicht aufgeführt werden.
Setzt man in (3.8) bis (3.1o) $\rho(x)=\rho=$const., dann folgt wegen der Beziegung $I_n(x)=I_{-n}(x)$, n=o,1,2...., für die Volterra'sche Integralgleichung $G_o(\tau)=1$ und aufgrund der Beziehung

$I_{n-1}(x)-I_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}\,I_n(x)$ für die Wahrscheinlichkeiten

$$P_{oo}(\tau)=1-\int_o^\tau \frac{e^{-(\rho+1)x}}{x}\sqrt{\rho}\; I_1(2\sqrt{\rho}x)dx$$

$$P_{on}(\tau)= \int_o^\tau \frac{e^{-(\rho+1)x}}{x}\,(n\sqrt{\rho}^n I_n(2\sqrt{\rho}x)-(n+1)\sqrt{\rho}^{n+1}I_{n+1}(2\sqrt{\rho}x))dx.$$

Dies sind die gleichen Ausdrücke, die Stange [1964] mit Hilfe der Laplace-Transformation erhalten hat.

4. Der Erwartungswert und die Varianz

Im folgenden soll nun der Erwartungswert und die Varianz der Zufallsgröße $X(\tau)$ berechnet werden. Für den Erwartungswert gilt der folgende Satz:

<u>Satz 4.1</u>
Der Erwartungswert $L_i(\tau)=\sum_{n=o}^{\infty} n\cdot P_{in}(\tau)$ der Zufallsgröße $X(\tau)$ existiert für $o\leq\tau<\infty$ und hat den Wert:

$$(4.1)\quad L_i(\tau) = (R(\tau)-1)\tau+\int_o^\tau P_{io}(x)dx+i.$$

Beweis:
Setzt man

$$(4.2)\quad q_{in}(\tau)=\sum_{k=n}^{\infty} P_{ik}(\tau) = 1-\sum_{k=o}^{n-1} P_{ik}(\tau),\quad n=o,1,2....,$$

dann folgt:

$$(4.3)\quad \frac{dq_{in}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\sum_{k=n}^{\infty} P_{ik}(\tau)=-\sum_{k=o}^{n-1}\frac{dP_{ik}(\tau)}{d\tau},\quad n=o,1,2.... .$$

Beachtet man die Beziehungen (3.1) und (3.2), dann läßt sich (4.3) in der folgenden Form schreiben:

$$(4.4)\quad \frac{dq_{in}}{d\tau} = \rho(\tau)\cdot P_{in-1}(\tau)-P_{in}(\tau),\quad n=1,2,.... .$$

Bildet man in (4.4) auf beiden Seiten die Summe über n, dann ergibt sich der folgende Ausdruck:

$$(4.5)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{dq_{in}(\tau)}{d\tau} = \rho(\tau)\sum_{n=1}^{\infty} P_{in-1}(\tau) - \sum_{n=1}^{\infty} P_{in}(\tau).$$

Da die $P_{in}(\tau)$ nicht negativ und stetig sind für alle n=o,1,2,..., und die Summen aufgrund der Beziehungen

$$\sum_{n=o}^{\infty} P_{in}(\tau)=1,\quad \sum_{n=1}^{\infty} P_{in}(\tau) = 1-P_{io}(\tau)$$

ebenfalls stetig sind, folgt die gleichmäßige Konvergenz von (4.5.), und es gilt:

$$(4.6)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dq_{in}(\tau)}{d\tau} = \rho(\tau) - 1 + P_{io}(\tau).$$

Nun gilt aber die folgende Beziehung:

$$(4.7)\quad \sum_{n=1}^{\infty} q_{in}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot P_{in}(\tau) = L_i(\tau).$$

Außerdem gilt wegen (3.3)

$$(4.8)\quad \sum_{n=1}^{\infty} q_{in}(o) = i,$$

daher ist auch (4.7) gleichmäßig konvergent und es gilt

$$(4.9)\quad \frac{dL_i(\tau)}{d\tau} = \rho(\tau) - 1 + P_{io}(\tau).$$

Integriert man (4.9) auf beiden Seiten, dann ergibt sich unter Beachtung von (4.8) der Erwartungswert zu

$$L_i(\tau) = (R(\tau)-1)\tau + \int_o^{\tau} P_{io}(x)dx + i.$$

Damit ist der Satz 4.1 bewiesen.

Für die Varianz gilt der folgende Satz:

Satz 4.2

Die Varianz $V_i(\tau) = \sum_{n=o}^{\infty} (n - L_i(\tau))^2 P_{in}(\tau)$ der Zufallsgröße $X(\tau)$ existiert für $o \leq \tau < \infty$ und hat den Wert:

$$(4.1o)\quad V_i(\tau) = (R(\tau)+1)\tau - (2i+1)\int_o^{\tau} P_{io}(x)dx - \left[\int_o^{\tau} P_{io}(x)dx\right]^2 - 2\int_o^{\tau} x(R(x)-1)P_{io}(x)dx.$$

Beweis:

Setzt man

$$(4.11)\quad r_{in}(\tau) = \sum_{k=n}^{\infty} q_{ik}(\tau), \quad n=o,1,2,\dots,$$

dann folgt wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $\sum_{k=n}^{\infty} q_{in}(\tau)$ und $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{dq_{ik}(\tau)}{d\tau}$, $n=o,1,2\dots$,

$$(4.12)\quad \frac{dr_{in}(\tau)}{d\tau} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{dq_{ik}(\tau)}{d\tau}, \quad n=1,2,\dots .$$

Aufgrund von (4.4) und der Beziehung

$$P_{in-1}(\tau) = q_{in-1}(\tau) - q_{in}(\tau), \quad n=1,2,\dots,$$

läßt sich (4.12) auf die folgende Gestalt bringen:

$$(4.13)\quad \frac{dr_{in}(\tau)}{d\tau} = \rho(\tau)q_{in-1}(\tau) - q_{in}(\tau), \quad n=1,2,3,\dots .$$

Bildet man in (4.13) auf beiden Seiten die Summe über n, dann ergibt sich unter Beachtung von $q_{io}(\tau)=1$ folgender Ausdruck:

$$(4.14)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dr_{in}(\tau)}{d\tau} = \rho(\tau) + \rho(\tau)\sum_{n=1}^{\infty} q_{in}(\tau) - \sum_{n=1}^{\infty} q_{in}(\tau)$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} q_{in}(\tau)$ folgt auch die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{dr_{in}(\tau)}{d\tau}$.

Nun gilt aber die Beziehung:

$$(4.15)\quad \sum_{n=1}^{\infty} r_{in}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot q_{in}(\tau) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot P_{in}(\tau) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} nP_{in}(\tau).$$

Außerdem gilt wegen (3.3)

$$(4.16)\quad \sum_{n=1}^{\infty} r_{in}(o) = \frac{i^2}{2} + \frac{i}{2},$$

daher ist auch (4.15) gleichmäßig konvergent und es gilt mit der Beziehung (4.7)

$$(4.17)\quad \frac{d}{d\tau}\sum_{n=1}^{\infty} r_{in}(\tau) = \rho(\tau) + \rho(\tau)L_i(\tau) - L_i(\tau).$$

Integriert man auf beiden Seiten von (4.17), dann ergibt sich unter Beachtung von (4.16):

$$(4.18)\quad \sum_{n=1}^{\infty} r_{in}(\tau) = \int_o^{\tau}(\rho(x) + (\rho(x)-1)L_i(x))dx + \frac{i}{2} + \frac{i^2}{2}.$$

Die Varianz $V_i(\tau)$ läßt sich aber wie folgt schreiben:

$$(4.19)\quad V_i(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot P_{in}(\tau) - (L_i(\tau))^2$$

Vergleicht man (4.15) und (4.19), dann ergibt sich für die Varianz mit (4.18) der folgende Ausdruck:

$$(4.2o)\quad V_i(\tau) = 2\int_o^{\tau} (\rho(x) + (\rho(x)-1))L_i(x))dx - L_i(\tau) - (L_i(\tau))^2 + i + i^2.$$

Beachtet man schließlich die Beziehungen für $R(\tau)$, $L_i(\tau)$ und $dL_i(\tau)/d\tau$, dann läßt sich (4.2o) mit Hilfe der partiellen

Integration zu dem folgenden Ausdruck umformen:

$$V_i(\tau)=(R(\tau)+1)\tau-(2i+1)\int_0^\tau P_{io}(x)dx-\left[\int_0^\tau P_{io}(x)dx\right]^2-2\int_0^\tau x(R(x)-1)P_{io}(x)dx.$$

Damit ist Satz 4.2 bewiesen.

5. Die Zustandswahrscheinlichkeiten $P_{in}(\tau)$ für $\tau\to\infty$

In der Praxis ist man oft nur an dem Verhalten des Wartesystems nach längerer Betriebszeit interessiert; deshalb versucht man die $P_{in}(\tau)$, n=o,1,2... für $\tau\to\infty$ zu bestimmen, falls diese Grenzwerte existieren. Im folgenden wird nun ein Satz angegeben, der etwas über das Verhalten von $\lim\limits_{n\to\infty} P_{in}(\tau)$ aussagt.

Satz 5.1

Falls $o < \lim\limits_{\tau\to\infty} \rho(\tau)=\tilde{\rho}<1$ existiert, dann existiert die Grenzverteilung $\lim\limits_{\tau\to\infty} P_{in}(\tau)=\tilde{P}_n$ und ist unabhängig vom Anfangszustand, und die $\tilde{P}_n$ sind gegeben durch:

$$(5.1)\quad \tilde{P}_n = (1-\tilde{\rho})\tilde{\rho}^n,\ n=o,1,2\ldots .$$

Beweis:

Es gilt

$$|P_{in}(\tau;\rho(\tau))-(1-\tilde{\rho})\tilde{\rho}^n| =$$

$$|(P_{in}(\tau;\rho(\tau))-P_{in}(\tau;\tilde{\rho}))+(P_{in}(\tau,\tilde{\rho})-(1-\tilde{\rho})\tilde{\rho}^n)| \leq$$

$$|P_{in}(\tau,\rho(\tau))-P_{in}(\tau;\tilde{\rho})|+|P_{in}(\tau,\tilde{\rho})-(1-\tilde{\rho})\tilde{\rho}^n|.$$

Für $\rho(\tau)=\tilde{\rho}=$const.<1 weiß man aber, daß die Grenzwahrscheinlichkeiten existieren[1)] und es gilt:

$$\lim_{\tau\to\infty} P_{in}(\tau;\tilde{\rho})=(1-\tilde{\rho})\tilde{\rho}^n,\ i,n=o,1,2\ldots .$$

Daher gilt für den letzten Ausdruck auf der rechten Seite der Ungleichung für genügend große τ stets:

$$(5.2)\quad |P_{in}(\tau;\tilde{\rho})-(1-\tilde{\rho})\tilde{\rho}^n| \leq \varepsilon/2,\ i,n=o,1,2\ldots .$$

1) Vergl.: Takács, L.: Introduction to the Theory of Queues, New York, Oxford University Press 1962, S. 26

Wegen der Stetigkeit von $P_{in}(\tau;\rho(\tau))$ in $\rho(\tau)$ gilt aber auch

$$(5.3)\quad |P_{in}(\tau;\rho(\tau))-P_{in}(\tau;\tilde{\rho})| \leq \varepsilon/2,\ i,n=o,1,2\ldots$$

für alle $|\rho(\tau)-\tilde{\rho}|<\delta$, sobald τ genügend groß ist.

Daher gilt auch insbesondere

$$(5.4)\quad P_{in}(\tau;\rho(\tau))-(1-\tilde{\rho})\tilde{\rho}^n| \leq \varepsilon,\ i,n=o,1,2\ldots ,$$

für alle hinreichend große τ. Dies ist aber eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß

$$\lim_{n\to\infty} P_{in}(\tau;\rho(\tau))=(1-\tilde{\rho})\tilde{\rho}^n,\quad i,n=o,1,2\ldots$$

gilt, und damit ist der Satz bewiesen.

Zum Schluß soll noch das Verhalten des Erwartungswertes und der Varianz für $\tau\to\infty$ untersucht werden. Es gilt der folgende Satz:

Satz 5.2

Falls $o<\lim\limits_{\tau\to\infty} \rho(\tau)=\tilde{\rho}<1$ existiert, dann existieren $\lim\limits_{\tau\to\infty} L_i(\tau)$ und $\lim\limits_{\tau\to\infty} V_i(\tau)$ und es gilt:

$$(5.5)\quad \lim_{\tau\to\infty} L_i(\tau) = \frac{\tilde{\rho}}{1-\tilde{\rho}}$$

$$(5.6)\quad \lim_{\tau\to\infty} V_i(\tau) = \frac{\tilde{\rho}}{(1-\tilde{\rho})^2}$$

Der Beweis ist einfach. Setzt man die Wahrscheinlichkeiten aus (5.1) in die Definitionen des Erwartungswertes und der Varianz ein und berücksichtigt die Beziehungen

$$\sum_{k=o}^{\infty} k\cdot\tilde{\rho}^k = \frac{\tilde{\rho}}{(1-\tilde{\rho})^2},\quad o\leq\tilde{\rho}<1,$$

$$\sum_{k=o}^{\infty} k^2\cdot\tilde{\rho}^k = \frac{2\tilde{\rho}^2}{(1-\tilde{\rho})^3} + \frac{\tilde{\rho}}{(1-\tilde{\rho})^2},\quad o\leq\tilde{\rho}<1,$$

dann folgt sofort die Behauptung.

Literaturverzeichnis

1. Abramowitz, A.; Stegun, I.A.: Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, Washington, National Bureau of Standards, 1965.

2. Bagchi, T.P.; Templeton, J.G.C.: Numerical Methods in Markov Chains and Bulk Queues, Springer-Verlag, Berlin. Heidelberg, New York, 1972.

3. Clarke, A.B.: The Time Dependent Waiting Line Problem, Report No. M 72o-1 R 39, Ann Arbor, University of Michigan,1953.

4. Clarke, A.B.: A Waiting Line Process of Markov Typ, Ann. Math. Stat. 27, 1956, S. 452-459.

5. Doob, I.L.: Stochastic Processes, Wiley, New York, London, 1964.

6. Feller, W.: On the Integrodifferential Equations of Completely Discontinuous Markov Processes, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 48 (194o), pp. 488-515.

7. Feller, W.: An Introduction to Probability Theory, Vol. 1, 2nd. Ed., Wiley, New York, London 1964.

8. Grauert, H.; Lieb, I.: Differential- und Integralrechnung I, 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

9. Grauert, H.; Fischer, W.: Differential- und Integralrechnung II, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

1o. Grauert, H.; Lieb, I.: Differential- und Integralrechnung III, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1968.

11. Hauser, R.: Das Zeitverhalten eines exponentiellen Warte-schlangensystems mit zeitabhängigen Parametern, Dissertation, Karlsruhe, 1975.

12. Leese, E.L.; Boyd, D.W.: Numerical Methods of Determining the Transient Behaviour of Queues with Variable Arrival Rates, J. Canad. Operations Res. Soc., 4, 1966, S. 1-13.

13. Luchak, G.: The Solution of the Single-Channel Queuing Equations Characterized by a Time-Dependent Poisson-Distributed Arrival Rate and a General Class of Holding Times, JORSA 4, 1956, S. 711-732.

14. Luchak, G.: The Distribution of the Time Required to Reduce to Some Preassigned Level a Single-Channel Queue Characterized by a Time-Dependent Poisson-Distributed Arrival Rate and a Class of Holding Times, JORSA 5, 1957, S. 2o5-2o9.

15. Petrovskij, I.G.: Vorlesungen über die Theorie der Integral-gleichungen, Physica-Verlag, Würzburg, 1953.

16. Stange, K.: Die Anlauflösung für den einfachen exponentiellen Bedienungskanal (mit beliebig vielen Warteplätzen), der für t=o leer ist, Unternehmensforschung, Bd. 8, Heft 1, 1964, S. 1-24.

17. Takâcs, L.: Introduction to the Theory of Queues, Oxford University Press, New York, 1962

18. Wragg, A.: The solution of an infinite set of differential-difference equations occuring in polymerization and queuing problems, Proc.Comb.Phil.Soc.,1963,59, S.117-124.