SONDERDRUCK AUS

OPERATIONS RESEARCH VERFAHREN METHODS OF OPERATIONS RESEARCH XXIX

Ein Warteschlangensystem mit zeitabhängigen Parametern und zwei parallelen gleichen Bedienungsstationen

Rolf Hauser, Saarbrücken

1. Einführung und Zusammenfassung

In [12] befaßt sich Saaty mit der zeitabhängigen Lösung für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Kundenanzahl in einem exponentiellen Warteschlangensystem mit c parallelen Bedienungsstationen. Er setzt dabei die Ankunftsrate λ und die Bedienungsrate μ als konstant voraus. Für den Fall zweier paralleler, gleicher Bedienungsstationen gibt er eine explizite Lösung für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Kundenanzahl im System an. In der Praxis sind aber die Ankunfts- und Bedienungsraten meistens nicht konstant, sondern variieren mit der Zeit. Im folgenden wird daher der Fall zweier paralleler gleicher Bedienungsstationen dahingehend verallgemeinert, daß die momentane Ankunftsrate $\lambda(t)$ und die für beide Bedienungsstationen gleichen Bedienungsraten $\mu(t)$ von der Zeit abhängen.

Es wird in der vorliegenden Arbeit eine exakte Lösung für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Kundenanzahl $X(t)$ im System in Abhängigkeit von der Zeit angegeben. Außerdem werden auch der Erwartungswert und die Varianz der Kundenanzahl im System berechnet. Für den Fall, daß für $t \to \infty$ eine Grenzverteilung existiert, wird diese angegeben.

2. Quantitative Erfassung des Warteschlangensystems

Es wird ein Markoffprozeß $X(t), o \leq t < \infty$, mit diskretem Zustandsraum $S = \{o, 1, 2, \ldots.\}$ betrachtet, für den eine nicht negativ, beschränkte Funktion $\lambda(t)$ und eine positiv, beschränkte Funktion $\mu(t)$, $o \leq t < \infty$ existieren, die den folgenden Bedingungen genügen:

(i) $P\{X(t+\Delta t)=i+1|X(t)=i\} = \lambda(t)\Delta t+o(\Delta t), \ i=o,1,2...,$

(ii) $P\{X(t+\Delta t)=i-1|X(t)=i\} = \begin{cases} \mu(t)\Delta t+o(\Delta t), & i=1, \\ 2\mu(t)\Delta t+o(\Delta t), & i=2,3,4,.... \end{cases}$

(iii) $P\{X(t+\Delta t)=j|X(t)=i\} = o(\Delta t), \ |i-j|>1, \ i,j=o,1,2....$

Die Gleichungen besagen, daß die Wahrscheinlichkeit einer Ankunft während des Zeitintervalls $(t,t+\Delta t)$ gleich $\lambda(t)\Delta t+o(\Delta t)$ ist, und die Wahrscheinlichkeit einer Bedienung während dieses Zeitintervalls $\mu(t)\Delta t+o(\Delta t)$ bzw. $2\mu(t)\Delta t+o(\Delta t)$ ist. Die Wahrscheinlichkeit von mehr als einer Ankunft und/oder Abfertigung ist $o(\Delta t)$. Man bezeichnet $\lambda(t)$ als momentane Ankunftsrate und $\mu(t)$ als momentane Bedienungsrate.

Es sei

$$P_{in}(t)=P\{X(t)=n|X(o)=i\}, i,n=o,1,2...,$$

die Wahrscheinlichkeit, daß sich das System zum Zeitpunkt t im Zustand n befindet, falls es zum Zeitpunkt o im Zustand i war. Unter diesen Bedingungen ergibt sich folgendes Kolmogoroff'sche System von Vorwärts-Differentialgleichungen:

(2.1) $\dfrac{dP_{io}(t)}{dt} = -\lambda(t)P_{io}(t)+\mu(t)P_{i1}(t),$

(2.2) $\dfrac{dP_{i1}(t)}{dt} = \lambda(t)P_{io}(t)-(\lambda(t)+\mu(t))P_{i1}(t)+2\mu(t)P_{i2}(t),$

(2.3) $\dfrac{dP_{in}(t)}{dt} = \lambda(t)P_{in-1}(t)-(\lambda(t)+2\mu(t))P_{in}(t)+2\mu(t)P_{in+1}(t), n\geq 2,$
$i=o,1,2... .$

(vgl. z.B. [6] S. 423 ff).

Das Hauptproblem besteht nun darin, dieses unendliche System von Differentialgleichungen unter der Anfangsbedingung:

(2.4) $P_{in}(o)=\delta_{in}, \ i,n=o,1,2...,$

zu lösen. Durch einen Satz von Feller[1] ist man versichert, daß das Differentialgleichungssystem genau ein stetig differenzierbares System von Lösungen $P_{in}(t)$ besitzt mit den Eigenschaften:

(i) $P_{in}(t)\geq o$ für jedes $n=o,1,2,...,i=o,1,2 ....$.

(ii) $\sum_{n=o}^{\infty} P_{in}(t)=1$ für jedes $t\geq o$.

3. Die Lösung des Differentialgleichungssystems

Führt man eine neue Zeitvariable τ wie folgt ein:

$$\tau=\tau(t)=2\int_o^t \mu(s)ds,$$

und führt man außerdem die momentane Verkehrsintensität als Quotient der momentanen Ankunfts- und Bedienungsrate ein, d.h.

$$\rho(\tau)=\rho(\tau(t))=\frac{\lambda(t)}{2\mu(t)} ,$$

dann läßt sich das System (2.1) bis (2.4) folgendermaßen umschreiben:

(3.1) $\dfrac{dP_{io}(\tau)}{d\tau} = -\rho(\tau)P_{io}(\tau)+o.5P_{i1}(\tau) ,$

(3.2) $\dfrac{dP_{i1}(\tau)}{d\tau} = \rho(\tau)P_{io}(\tau)-(\rho(\tau)+o.5)P_{i1}(\tau)+P_{i2}(\tau),$

(3.3) $\dfrac{dP_{in}(\tau)}{d\tau} = \rho(\tau)P_{in-1}(\tau)-(\rho(\tau)+1)P_{in}(\tau)+P_{in+1}(\tau), \ n\geq 2,$
$i=o,1,2....$

(3.4) $P_{in}(o) = \delta_{in}, \ i,n=o,1,2....$.

Führt man eine mittlere Verkehrsintensität

(3.5) $R(\tau)=\frac{1}{\tau}\int_o^{\tau} \rho(s)ds$

ein, und führt man außerdem ein neues System von abhängigen Variablen wie folgt ein:

1) Feller, W.: On the Integrodifferential Equations of Completely Discontinuous Markov Prozesses, Trans. Am. Math. Soc., Vol. 48, 194o, P. 488-515

(3.6) $Q_{in}(\tau)=e^{(R(\tau)+1)\tau}\cdot P_{in}(\tau)$, $i,n=o,1,2...$,

dann läßt sich das System (3.1) bis (3.4) auf die folgende Weise schreiben:

(3.7) $$\frac{dQ_{io}(\tau)}{d\tau} = Q_{io}(\tau)+o.5Q_{i1}(\tau),$$

(3.8) $$\frac{dQ_{i1}(\tau)}{d\tau} = \rho(\tau)Q_{io}(\tau)+o.5Q_{i1}(\tau)+Q_{i2}(\tau),$$

(3.9) $$\frac{dQ_{in}(\tau)}{d\tau} = \rho(\tau)Q_{in-1}(\tau)+Q_{in+1}(\tau),\ n\geq 2 \quad i=o,1,2....$$

(3.1o) $Q_{in}(o) = \delta_{in}$, $i,n=o,1,2,...$.

Um das Differentialgleichungssystem (3.7) bis (3.9) unter der Anfangsbedingung (3.1o) zu lösen, wird eine erzeugende Funktion in der folgenden Weise eingeführt:

(3.11) $$Q_i(z,\tau) = \sum_{n=o}^{\infty} Q_{i,n}(\tau)\frac{(z-\tau)^n}{n!}\ ,\ i=o,1,2...\ .$$

Diese Funktion ist analytisch in z und stetig differenzierbar in τ. Differenziert man $Q_i(z,\tau)$ nach z und τ unter Beachtung von (3.8) und (3.9), dann ergibt sich die folgende partielle hyperbolische Differentialgleichung für $Q_i(z,\tau)$:

(3.12) $$\frac{\partial^2 Q_i(z,\tau)}{\partial z\partial\tau} = \rho(\tau)Q_i(z,\tau)+g_i(\tau)$$

mit

$$g_i(\tau)=o.5Q_{i1}(\tau).$$

Die Lösung solch einer partiellen Differentialgleichung verlangt im allgemeinen zwei Randbedingungen. Diese sind gegeben durch (3.7) und (3.1o), die sich auf die folgende Form bringen lassen:

(3.13) $$\left.\frac{\partial Q_i(z,\tau)}{\partial\tau}\right|_{z=\tau} = Q_i(\tau,\tau)-g_i(\tau)$$

und

(3.14) $$Q_i(z,o)=\frac{z^i}{i!}\ .$$

Die partielle Differentialgleichung (3.12) mit den Randbedingungen (3.13) und (3.14) wird mit Hilfe der Riemannschen Integrationsmethode (vgl. [13] S. 175 ff) gelöst. $Q_i(z,\tau)$ wird zunächst mit Hilfe der unbekannten Funktionen $g_i(\tau)$ und

(3.15) $$f_i(\tau) = \frac{\partial Q_i(o,\tau)}{\partial\tau}$$

dargestellt. Die Bedingung (3.13) und die Beziehung

(3.16) $$\left.\frac{Q_i(z,\tau)}{\partial z}\right|_{z=\tau} = 2g_i(\tau)$$

werden dann gebraucht, um ein Integralgleichungssystem für die unbekannten Funktionen $g_i(\tau)$ und $f_i(\tau)$ abzuleiten.

Um zunächst die Riemannsche Funktion $V(z,\tau,x,y)$ zu bestimmen, wird die zu (3.12) adjungierte Differentialgleichung

(3.17) $$\frac{\partial^2 W_i(z,\tau)}{\partial z\partial\tau} - \rho(\tau)W_i(z,\tau)=o$$

gelöst. Setzt man:

$$W_i(z,\tau)=V_i(t)$$

mit

$$t=2\sqrt{(R(\tau)\tau-R(x)x)(z-y)}\ ,$$

dann ergibt sich die nachstehende Bessel'sche Differentialgleichung

$$V_i''(t) + \frac{1}{t}V_i'(t)-V_i(t)=o$$

mit der Lösung $I_o(t)$, wobei $I_n(t)$ die modifizierte Besselfunktion 1. Art n-ter Ordnung darstellt mit

$$I_n(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^n \sum_{k=o}^{\infty} \frac{(t/2)^{2k}}{k!\Gamma(n+k+1)}\ .$$

Mit Hilfe der Riemannschen Funktion

$$V_i(z,\tau,x,y)=I_o(2\sqrt{(R(\tau)\tau-R(x)x)(z-y)}\ )$$

läßt sich dann die Lösung von (3.12) angeben:

$$(3.18)\quad Q_i(z,\tau)=I_o(2\sqrt{R(\tau)\tau z})Q_{io}(o)$$
$$+\int_o^z I_o(2\sqrt{R(\tau)\tau(z-y)})\frac{y^{i-1}}{(i-1)!}dy$$
$$+\int_o^\tau I_o(2\sqrt{(R(\tau)\tau-R(x)x)z})f_i(x)dx$$
$$+\int_o^\tau\int_o^z I_o(2\sqrt{(R(\tau)\tau-R(x)x)(z-y)})g_i(x)dydx.$$

Führt man im ersten Integral von (3.18) die Substitution

$$2\sqrt{R(\tau)\tau z}=u,\ \sqrt{1-\frac{y}{z}}=\sin(t)$$

durch, dann ergibt das erste Integral mit Hilfe der folgenden Integrationsformel für Besselfunktionen

$$(3.19)\quad \int_o^{\pi/2} I_n(u\cdot\sin(t))\sin^{n+1}(t)\cos^{2m+1}(t)dt$$
$$=\frac{2^m\Gamma(m+1)}{u^{m+1}}I_{n+m+1}(u)\ ,\ n,m\geq o,$$

(Vgl. [1] S. 485, Formel 11.4.1o)

den Wert:

$$\left[\frac{z}{R(\tau)\tau}\right]^{i/2}\cdot I_i(2\sqrt{R(\tau)\tau z}).$$

Das Doppelintegral in (3.18) läßt sich auf ein einfaches Integral zurückführen. Die Integration über y in dem Doppelintegral von (3.18) ergibt mit der Substitution

$$2\sqrt{(R(\tau)\tau-R(x)x)z}=u,\ \sqrt{1-\frac{y}{z}}=\sin(t)$$

und der Integrationsformel (3.19) den Wert:

$$\int_o^\tau\sqrt{\frac{z}{R(\tau)\tau-R(x)x}}\cdot I_1(2\sqrt{(R(\tau)\tau-R(x)x)z})g_i(x)dx.$$

Setzt man:

$$(3.2o)\quad A_n(x,\tau,z)=\left[\frac{z}{R(\tau)\tau-R(x)x}\right]^{n/2}\cdot I_n(2\sqrt{(R(\tau)\tau-R(x)x)z}),\ n=o,\pm1,\pm2,\ldots,$$

dann läßt sich (3.18) in der Form

$$(3.21)\quad Q_i(z,\tau)=A_i(o,\tau,z)+\int_o^\tau A_o(x,\tau,z)f_i(x)dx$$
$$+\int_o^\tau A_1(x,\tau,z)g_i(x)dx$$

darstellen.

Beachtet man die Beziehungen:

$$\frac{\partial}{\partial z}A_n(x,\tau,z)=A_{n-1}(x,\tau,z)\ ,$$
$$\frac{\partial}{\partial\tau}A_n(x,\tau,z)=\rho(\tau)A_{n+1}(x,\tau,z)\ ,$$
$$(3.22)$$
$$A_n(o,o,o)=\delta_{on}\ ,$$
$$A_{-n}(\tau,\tau,\tau)=o\ \text{für}\ n>o;\ A_o(\tau,\tau,\tau)=1,\ A_1(\tau,\tau,\tau)=\tau.$$

dann findet man:

$$(3.23)\quad P_{in}(\tau)=e^{-(R(\tau)+1)\tau}\cdot\left.\frac{\partial^n Q_i(z,\tau)}{\partial z^n}\right|_{z=\tau}$$
$$=e^{-(R(\tau)+1)\tau}\left[A_{i-n}(o,\tau,\tau)+\int_o^\tau A_{-n}(x,\tau,\tau)f_i(x)dx\right.$$
$$\left.+\int_o^\tau A_{-n+1}(x,\tau,\tau)g_i(x)dx\right],\ i,n=o,1,2\ldots.$$

Die unbekannten Funktionen $f_i(x)$ und $g_i(x)$ ergeben sich mit Hilfe von (3.13), (3.16) und (3.22) als Lösungen des Integralgleichungssystems

$$(3.24)\quad f_i(\tau)+\int_o^\tau H_{-1}(x,\tau)f_i(x)dx+\int_o^\tau H_o(x,\tau)g_i(x)dx=-H_{i-1}(o,\tau)$$
$$g_i(\tau)+\int_o^\tau K_{-1}(x,\tau)f_i(x)dx+\int_o^\tau K_o(x,\tau)g_i(x)dx=-K_{i-1}(o,\tau)$$
$$i=o,1,2\ldots\ ,$$

mit

$$H_{i-1}(x,\tau)=o.5(\tau+1)A_{i-1}(x,\tau,\tau)-A_i(x,\tau,\tau)+\rho(\tau)A_{i+1}(x,\tau,\tau)$$

$$K_{i-1}(x,\tau)=-o.5A_{i-1}(x,\tau,\tau),\ i=o,1,2\ldots\ .$$

Dieses Volterra'sche Integralgleichungssystem 2. Art besitzt stetige Kerne und außerdem sind $H_{i-1}(o,\tau)$ und $K_{i-1}(o,\tau)$, $i=o,1,2,\ldots$, stetig; daher besitzt das Integralgleichungssystem eindeutige und stetige Lösungen $f_i(\tau)$ und $g_i(\tau)$ und (3.23) ergibt die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.

4. Der Erwartungswert und die Varianz der Kundenanzahl im System

Der Erwartungswert $L_i(\tau)$ und die Varianz $V_i(\tau)$ der Anzahl der Kunden im System sind aufgrund der Definition:

$$L_i(\tau) = \sum_{n=o}^{\infty} nP_{in}(\tau),$$

$$V_i(\tau) = \sum_{n=o}^{\infty} (n-L_i(\tau))^2\ P_{in}(\tau). \qquad i=o,1,2\ldots.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe

$\sum_{n=o}^{\infty} n\frac{dP_{in}(\tau)}{d\tau}$ und der Konvergenz von

$\sum_{n=o}^{\infty} nP_{in}(\tau)$ im Punkt $\tau=o$ gilt:

$$(4.1)\quad \frac{dL_i(\tau)}{d\tau} = \sum_{n=o}^{\infty} n\frac{dP_{in}(\tau)}{d\tau},\ i=o,1,2\ldots.\ .$$

Setzt man in (4.1) für $dP_{in}(\tau)/d\tau$ die Ausdrücke (3.1) bis (3.3) ein, dann folgt mit der Tatsache, daß $\sum_{n=o}^{\infty} P_{in}(\tau)=1$ ergibt, die folgende Beziehung:

$$(4.2)\quad \frac{dL_i(\tau)}{d\tau} = \rho(\tau)-1+P_{io}(\tau)+o.5P_{i1}(\tau)\ ,\ i=o,1,2\ldots\ .$$

Integriert man (4.2) auf beiden Seiten unter Beachtung der Anfangsbedingung $L_i(o)=i$, $i=o,1,2\ldots$, dann ergibt sich der Erwartungswert $L_i(\tau)$ mit der Abkürzung

$$(4.3)\quad B_i(\tau)=P_{io}(\tau)+o.5P_{i1}(\tau)$$

zu:

$$(4.4)\quad L_i(\tau)=(R(\tau)-1)\tau + \int_o^{\tau} B_i(x)dx+i,\ i=o,1,2\ldots\ .$$

Der Erwartungswert läßt sich also bei Kenntnis von $P_{io}(\tau)$ und $P_{i1}(\tau)$ bestimmen. Ebenso läßt sich auch die Varianz nur mit Kenntnis von $P_{io}(\tau)$ und $P_{i1}(\tau)$ bestimmen.

Die Varianz $V(\tau)$ aus der Definition läßt sich umformen zu:

$$V_i(\tau) = \sum_{n=o}^{\infty} n^2P_{in}(\tau) - [L_i(\tau)]^2,\ i=o,1,2\ldots\ .$$

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe

$\sum_{n=o}^{\infty} n^2\frac{dP_{in}(\tau)}{d\tau}$ und der Konvergenz von

$\sum_{n=o}^{\infty} n^2P_{in}(\tau)$ im Punkt $\tau=o$ gilt:

$$(4.5)\quad \frac{dV_i(\tau)}{d\tau} = \sum_{n=o}^{\infty} n^2\frac{dP_{in}(\tau)}{d\tau} - 2L_i(\tau)\frac{dL_i(\tau)}{d\tau},\ i=o,1,2\ldots\ .$$

Setzt man in (4.5) für $dP_{in}(\tau)/d\tau$ die Ausdrücke (3.1) bis (3.3) ein, dann ergibt sich aufgrund der Tatsache $\sum_{n=o}^{\infty} P_{in}(\tau)=1$, der folgende Ausdruck:

$$(4.6)\quad \frac{dV_i(\tau)}{d\tau} = 2[\rho(\tau)+(\rho(\tau)-1)\cdot L_i(\tau)]-(1+2L_i(\tau))\frac{dL_i(\tau)}{d\tau} + P_{i1}(\tau),\quad i=o,1,2\ldots$$

Integriert man (4.6) auf beiden Seiten unter Beachtung der Anfangsbedingung $V_i(o)=o$, $i=o,1,2\ldots$, dann ergibt sich die Varianz zu:

$$(4.7)\quad V_i(\tau)=2\int_o^{\tau}[\rho(x)+(\rho(x)-1)L_i(x)]dx-L_i(\tau)-[L_i(\tau)]^2+\int_o^{\tau}P_{i1}(x)dx+i+i^2.\quad i=o,1,2\ldots$$

Mit Hilfe der partiellen Integration und der Beziehungen (4.2) und (4.3) läßt sich die Varianz schließlich wie folgt darstellen:

$$(4.8)\quad V_i(\tau)=R(\tau)+1)\tau-(2i+1)\int_0^\tau B_i(x)dx-\left[\int_0^\tau B_i(x)dx\right]^2$$

$$-2\int_0^\tau x(R(x)-1)B_i(x)dx+\int_0^\tau P_{i1}(x)dx,\quad i=o,1,2....$$

5. Die Zustandswahrscheinlichkeiten $P_{in}(\tau)$ für $\tau\to\infty$

In der Praxis ist man oft nur an dem Verhalten des Wartesystems nach längerer Betriebszeit interessiert; deshalb versucht man die $P_{in}(\tau)$, n=o,1,2.... für $\tau\to\infty$ zu bestimmen, falls diese Grenzwerte existieren. Im folgenden wird nun ein Satz angegeben, der etwas über das Verhalten von $\lim_{\tau\to\infty} P_{in}(\tau)$ aussagt.

Satz 5.1

Falls $o<\lim_{\tau\to\infty}\rho(\tau)=\tilde\rho<1$ existiert, dann existiert die Grenzverteilung $\lim_{\tau\to\infty}P_{in}(\tau)=\tilde P_n$ und ist unabhängig vom Anfangszustand, und die $\tilde P_n$ sind gegeben durch:

$$(5.1)\quad \tilde P_o=\frac{1-\tilde\rho}{1+\tilde\rho}\;;\;\tilde P_n=2\cdot\frac{1-\tilde\rho}{1+\tilde\rho}\tilde\rho^n,\ n=o,1,2....\ .$$

Beweis:

Es gilt:

$|P_{in}(\tau;\rho(\tau))-\tilde P_n|=$

$|(P_{in}(\tau;\rho(\tau))-P_{in}(\tau;\tilde\rho))+(P_{in}(\tau;\tilde\rho)-\tilde P_n)|$

$\leq|P_{in}(\tau;\rho(\tau))-P_{in}(\tau;\tilde\rho)|+|P_{in}(\tau;\tilde\rho)-\tilde P_n|.$

Für $\rho(\tau)=\tilde\rho=\text{const.}<1$ weiß man aber, daß die Grenzwahrscheinlichkeiten existieren und es gilt:

$\lim_{\tau\to\infty}P_{in}(\tau;\tilde\rho)=\tilde P_n$, i,n=o,1,2....

mit $\tilde P_n=2\,\frac{1-\tilde\rho}{1+\tilde\rho}\,\tilde\rho^n$ für $n\geq 1$; $\tilde P_o=\frac{1-\tilde\rho}{1+\tilde\rho}$,

(vgl. Saaty [12] S. 765). Daher gilt für den letzten Ausdruck auf der rechten Seite der Ungleichung für genügend große τ stets:

$$(5.2)\quad |P_{in}(\tau;\tilde\rho)-\tilde P_n|\leq\varepsilon/2,\ i,n=o,1,2.....\ .$$

Wegen der Stetigkeit von $P_{in}(\tau;\rho(\tau))$ in $\rho(\tau)$ gilt aber auch:

$$(5.3)\quad |P_{in}(\tau;\rho(\tau))-P_{in}(\tau;\tilde\rho)|\leq\varepsilon/2,\ i,n=o,1,2....$$ für alle $|\rho(\tau)-\tilde\rho|<\delta$, sobald τ genügend groß ist.

Daher gilt auch insbesondere

$$(5.4)\quad |P_{in}(\tau;\rho(\tau))-\tilde P_n|\leq\varepsilon,\ i,n=o,1,2...,$$

für alle hinreichend große τ. Dies ist aber eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß

$\lim_{\tau\to\infty}P_{in}(\tau;\rho(\tau))=\tilde P_n$, i,n=o,1,2...,

gilt, und damit ist der Satz bewiesen.

Zum Schluß soll noch das Verhalten des Erwartungswertes und der Varianz für $\tau\to\infty$ untersucht werden.

Es gilt der folgende Satz:

Satz 5.2

Falls $o<\lim_{\tau\to\infty}\rho(\tau)=\tilde\rho<1$ existiert, dann existieren $\lim_{\tau\to\infty}L_i(\tau)$ und $\lim_{\tau\to\infty}V_i(\tau)$, i=o,1,2..., und es gilt:

$$(5.5)\quad \lim_{\tau\to\infty}L_i(\tau)=\frac{2\tilde\rho}{1-\tilde\rho^2}\ ,$$

$$(5.6)\quad \lim_{\tau\to\infty}V_i(\tau)=\frac{2\tilde\rho(1+\tilde\rho^2)}{(1-\tilde\rho^2)^2}\ .$$

Der Beweis ist einfach. Setzt man die Wahrscheinlichkeiten aus (5.2) in die Definitionen des Erwartungswertes und der Varianz ein und berücksichtigt die Beziehungen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \tilde{\rho}^k = \frac{\tilde{\rho}}{(1-\tilde{\rho})^2}, \quad o \leq \tilde{\rho} < 1,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \tilde{\rho}^k = \frac{\tilde{\rho}(1+\tilde{\rho})}{(1-\tilde{\rho})^3}, \quad o \leq \tilde{\rho} < 1,$$

dann folgt sofort die Behauptung.

Literaturverzeichnis:

[1] Abramowitz, A.; Stegun, I.A.: Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, Washington, National Bureau of Standards, 1965.

[2] Clarke, A.B.: The Time Dependent Waiting Line Problem, Report No. M 72o-1 R 39, Ann Arbor, University of Michigan, 1953.

[3] Clarke, A.B.: A Waiting Line Process of Markov Typ, Ann. Math. Stat. 27, 1956, S. 452-459.

[4] Doob, I.L.: Stochastic Processes, Wiley, New York, London, 1964.

[5] Feller, W.: On the Integrodifferential Equations of Completely Discontinous Markov Processes, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 48 (194o), pp. 488-515.

[6] Feller, W.: An Introduction to Probability Theory, Vol. 1, 2nd. Ed., Wiley, New York, London, 1964.

[7] Grauert, H.; Lieb, I.: Differential- und Integralrechnung I, 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[8] Grauert, H.; Fischer, W.: Differential- und Integralrechnung II 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[9] Grauert, H.; Lieb, I.: Differential- und Integralrechnung III, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1968.

[1o] Hauser, R.: Das Zeitverhalten eines exponentiellen Warteschlangensystems mit zeitabhängigen Parametern, Dissertation, Karlsruhe, 1975.

[11] Petrovskij, I.G.: Vorlesungen über die Theorie der Integralgleichungen, Physica-Verlag, Würzburg, 1953.

[12] Saaty, T.L.: Time-dependent Solution of the Many-Server Poisson Queue, Operations Research, Vol. 8 (196o) pp. 755-772.

[13] Sauer, R.; Szabó, I.: Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs, Teil III, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1968.

Anschrift:
Institut für Statistik
Im Stadtwald
Bau 31
6600 Saarbrücken

Some Prediction Problems in Semi-Markov Queueing Models and Related Topics

Jacques Janssen, Bruxelles

ABSTRACT

We give some results on prediction problems for discrete time stochastic processes related to a random walk, firstly in the classical case - i.e. when the successive steps are i.i.d. random variables - and secondly when the random walk is generated by a semi-Markov chain. The two main applications presented here concern the successive waiting times in queueing theory and the ruin problem in risk theory (*).

§1. CLASSICAL RANDOM WALK

On the probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, let $(X_n, n \geq 1)$ be i.i.d. random variables with F as common distribution function with second order moments such that

$$0 < F(0-) \leq F(0) < 1, \quad \mathbb{E}(X_n) = m \tag{1.1}$$

The "position" of the walk after the nth step is given by

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \tag{1.2}$$

and we introduce :

$$X_o = 0, \quad S_o = 0 \quad \text{a.s.} \tag{1.3}$$

The W-process and the M-process are inductively defined as follows :

$$\begin{aligned} &W_o = 0 \\ &W_{n+1} = (W_n + X_{n+1})^+, \quad n \geq 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} &M_o = 0 \\ &M_n = \sup \{S_o, S_1, \dots, S_n\} \end{aligned} \tag{1.5}$$

PROBLEM : Given at $t = n$, the first n steps $X_1, \dots, X_n$, find the functions of these variables which give the best least square estimators of W_{n+1} and M_{n+1} .

(*) A part of these results was presented at the 10th meeting of the I.M.S. in Leuven, Belgium (August 1977).